Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"

Proba pe echipe, clasele IX-XII

27 octombrie 2013

RUNDA a III-a

Problema 1. Fie $a,b>0, a\neq b.$ Să se rezolve ecuaţia

$$(a+b+x)\cdot\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)=\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Problema 2. Numerele naturale nenule a,b,c,d satisfac condiţiile

$a>b>c>d$, $a+b+c+d=1000$ şi $a^2-b^2+c^2-d^2=1000.$ Să se determine numărul de valori posibile ale lui a.

Problema 3. Să se determine numerele reale a,b,c pentru care mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$a\cdot\sin x+\sin 3x+b\cdot\sin 5x+c\cdot\sin 7x=0$ este $\left\{\frac{k\pi}{4}/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Problema 4. Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$ cu $\mathrm{Tr}A=1$ şi $\det A=2$ Să se calculeze

$$\det\left(A^2-I_2\right)+\det\left(A^2+I_2\right)+\det\left(A^2+2\cdot I_2\right)+\det\left(A^3+I_2\right).$$